SF1624 Algebra och geometri

Femtonde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

23 november, 2009

Linjärt beroende och oberoende

Definition (Linjärt beroende och oberoende)

Vi säger att $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k$ i $\mathbb{R}^n$ är *linjärt beroende* om det finns $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ så att

$$a_1\overline{u}_1 + a_2\overline{u}_2 + \cdots + a_k\overline{u}_k = 0$$

och de är *linjärt oberoende* om

$$a_1\overline{u}_1 + a_2\overline{u}_2 + \cdots + a_k\overline{u}_k = 0 \Longrightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_k) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Andra formuleringar av linjär oberoende

Sats

Följande påståenden om vektorerna $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k$ *i* $\mathbb{R}^n$ *är ekvivalenta:*

- $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k$ *är linjärt oberoende.*
- $a_1\overline{u}_1 + a_2\overline{u}_2 + \cdots + a_k\overline{u}_k = 0 \Longrightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_k) = (0, 0, \ldots, 0)$.
- *Ingen av vektorerna* $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k$ *är en linjärkombination av de övriga.*
- *Alla olika linjärkombinationer av* $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k$ *ger olika vektorer.*
- *Den reducerade trappstegsformen för matrisen med* $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_k$ *som kolonner har en ledande etta i varje kolonn.*

Cramers regel

Med hjälp av determinanten kan man få en formel för lösningen av linjära ekvationssystem med lika många ekvationer som obekanta:

Sats (Cramers regel)

Lösningen till $A\overline{x} = \overline{b}$ *ges av*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

där A_i *är matrisen som får från* A *genom att byta ut kolonn* i *mot högerledet,* $\overline{b}$*, för* $i = 1, 2, \ldots, n$*.*

Uppgifter

Följande uppgifter kommer från kursboken, *Linjär alegebra och geometri* av L. Andersson, mfl.

Uppgift (5.14)

Genom punkterna $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ och $P_3 = (x_3, y_3)$ ska en parabel på formen $y = ax^2 + bx + c$ gå. Vilka krav ställs på punkterna för att det ska finnas

a) en unik parabel,

b) oändligt många parabler,

c) ingen parabel.

Uppgifter, forts.

Uppgift (5.19)

För vilka värden på k finns det tal a, b och c så att kurvan

$$y = ae^{kx} + be^{2kx} + ce^{3kx}$$

går genom punkterna $(-1, 2)$, $(0, 5)$ oc $(1, 3)$?

Uppgifter, forts.

Uppgift (5.34)

Visa att det i en triangel med sidlängderna a, b och c, med motstående vinklar α, β och γ gäller att

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & c\cos\beta & + & b\cos\gamma & = & a \\ c\cos\alpha & & & + & a\cos\gamma & = & b \\ b\cos\alpha & + & a\cos\beta & & & = & c \end{array}\right.$$

och använd Cramers regel på detta för att härleda Cosinussatsen.